

1. Мәселенің қойылымы

Сақина облысын $r_1 < r < r_2$, $0 \leq \theta < 2\pi$ деп алайық. Лаплас теңдеуі поляр координаттарда келесідей жазылады:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Шектеу шарттарын сақина шекараларында белгілейік:

$$u(r_1, \theta) = f_1(\theta), \quad u(r_2, \theta) = f_2(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Мақсат — $u(r, \theta)$ табу.

2. Фурье әдісімен айнымалыларды бөліп алу

Айнымалыларды бөлейік:

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Лаплас теңдеуіне орнықтырамыз:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

Айнымалылар бөліну үшін:

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda, \quad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

3. Бұрыштық теңдеуді шешу

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta).$$

Шектеу шарты бойынша $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Сәйкес шешімдер:

$$\Theta_0 = 1, \quad \Theta_n(\theta) = \cos n\theta, \sin n\theta.$$

4. Радиалды теңдеуді шешу

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0$$

Бұл Эйлер теңдеуі, шешімі:

$$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r, \quad R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad n \geq 1.$$

5. Жалпы шешім

$$u(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta.$$

6. Шаршы шекара шарттарын қолдану

$$u(r_1, \theta) = f_1(\theta), \quad u(r_2, \theta) = f_2(\theta)$$

әрқайсысын Фурье сериясына бөліп аламыз:

$$f_i(\theta) = a_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(i)} \cos n\theta + b_n^{(i)} \sin n\theta), \quad i = 1, 2.$$

Әрбір n үшін коэффициенттер жүйесін шешеміз:

- $n = 0$:

$$A_0 + B_0 \ln r_1 = a_0^{(1)}, \quad A_0 + B_0 \ln r_2 = a_0^{(2)} \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{a_0^{(2)} - a_0^{(1)}}{\ln(r_2/r_1)}, \quad A_0 = a_0^{(1)} - B_0 \ln r_1.$$

- $n \geq 1$:

$$A_n r_1^n + B_n r_1^{-n} = a_n^{(1)}, \quad A_n r_2^n + B_n r_2^{-n} = a_n^{(2)} \quad \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{a_n^{(2)} - a_n^{(1)} (r_2/r_1)^{-n}}{r_2^n - r_2^{-n} r_1^{2n}}, \quad B_n = a_n^{(1)} - A_n r_1^n$$

(Синус коэффициенттері C_n, D_n үшін де дәл солай).

7. Қорытынды

Финалдық шешім:

$$u(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left((A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \right)$$

мұндағы барлық коэффициенттер шекара шарттары арқылы есептеледі.

1. Мәселенің қойылымы

Диск облысын $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta < 2\pi$ деп алайық. Лаплас теңдеуі поляр координаттарда:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Шекаралық шарт:

$$u(R, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Мақсат — $u(r, \theta)$ табу.

2. Айнымалыларды бөліп алу

Айнымалыларды бөлейік:

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Лаплас теңдеуіне орнықтырсақ:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

Айнымалыларды бөліп аламыз:

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda, \quad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

3. Бұрыштық теңдеуді шешу

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta).$$

Шектеу шарты бойынша $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Шешімдер:

$$\Theta_0 = 1, \quad \Theta_n(\theta) = \cos n\theta, \sin n\theta.$$

4. Радиалды теңдеуді шешу

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0$$

Бұл Эйлер теңдеуі, жалпы шешімі:

$$R_0(r) = A_0, \quad R_n(r) = A_nr^n + B_nr^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Ескерту: шеңбер ортасында $r = 0$ ешқандай сингулярлық болмайтындықтан, $B_n = 0$ (өйткені $r^{-n} \rightarrow \infty$ кезінде шексіздікке апарады).

Сондықтан диск үшін радиалды шешім:

$$R_0(r) = A_0, \quad R_n(r) = A_nr^n, \quad n \geq 1.$$

5. Жалпы шешім

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \sin n\theta.$$

6. Шекаралық шартты қолдану

$$u(R, \theta) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Фурье сериясына бөлеміз. Сәйкесінше:

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \frac{a_n}{R^n}, \quad C_n = \frac{b_n}{R^n}.$$

7. Қорытынды

Диск ішіндегі шешім:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{R^n} a_n \cos n\theta + \frac{r^n}{R^n} b_n \sin n\theta \right)$$

мұндағы a_n, b_n – шекаралық функция $f(\theta)$ үшін Фурье коэффициенттері:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

1. Мәселенің қойылымы

Шеңбер сыртындағы облысты алайық: $r > R, 0 \leq \theta < 2\pi$. Лаплас теңдеуі поляр координаттарда:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Шекаралық шарт шеңбер бойында:

$$u(R, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Қосымша шарт шексіздікке $r \rightarrow \infty$ кезінде:

$$u(r, \theta) \rightarrow 0.$$

Мақсат — $u(r, \theta)$ табу.

2. Айнымалыларды бөліп алу

Айнымалыларды бөлейік:

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Лаплас теңдеуіне орнықтырсақ:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0.$$

3. Бұрыштық теңдеуді шешу

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta).$$

Сәйкес шешімдер: $\lambda = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Theta_0 = 1, \quad \Theta_n(\theta) = \cos n\theta, \sin n\theta.$$

4. Радиалды теңдеуді шешу

$$r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n = 0$$

Эйлер теңдеуі, жалпы шешімі:

$$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r, \quad R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Сыртқы шеңберде $r \rightarrow \infty$ кезінде $u(r, \theta) \rightarrow 0$ шартын қолданамыз:

- $R_0(r) \rightarrow 0 \Rightarrow A_0 = 0$ (логарифм шартқа сай $B_0 = 0$ немесе оны тұрақты мән деп санауға болады, егер шексіздікке қарасақ)
- $n \geq 1$ үшін $A_n r^n \rightarrow \infty \Rightarrow A_n = 0$

Сондықтан диск сыртындағы шешім:

$$R_0(r) = 0 \text{ (немесе тұрақты)}, \quad R_n(r) = B_n r^{-n}, \quad n \geq 1.$$

5. Жалпы шешім

$$u(r, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-n} \sin n\theta.$$

6. Шекаралық шартты қолдану

Шекаралық шарт $r = R$:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Сәйкесінше:

$$B_0 = a_0, \quad B_n = a_n R^n, \quad D_n = b_n R^n.$$

7. Қорытынды

Шеңбер сыртындағы шешім:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \cos n\theta + b_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \sin n\theta \right)$$

мұндағы a_n, b_n – шекаралық функция $f(\theta)$ үшін Фурье коэффициенттері:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

1. Мәселенің қойылымы

Тіктөртбұрышты облысты алайық:

$$0 < x < L, \quad 0 < y < H.$$

Пуассон теңдеуі:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$

шекаралық шарттар (мысалы, Дирихле типі):

$$u(0, y) = u(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, H) = 0.$$

Мақсат — $u(x, y)$ табу.

2. Айнымалылар бойынша бөліну

Айнымалыларды бөліп алайық:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y),$$

шектеулерді қанағаттандыратын Фурье сериясы түрінде.

- x - бойынша Дирихле шарттары: $X_n(0) = X_n(L) = 0 \Rightarrow X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$.
- Сондықтан Пуассон теңдеуі:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

3. Радиалды теңдеуді 1D түрге келтіру

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

Фурье сериясына орнықтырамыз:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad F_n(y) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Сәйкесінше:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[- \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 Y_n(y) + Y_n''(y) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Фурье теоремасы бойынша әрбір n үшін:

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 Y_n(y) = F_n(y).$$

Бұл 1D Пуассон теңдеуі әрбір n үшін.

4. Шекаралық шарттар бойынша шешу

Егер $y = 0$ және $y = H$ үшін $u(x, 0) = u(x, H) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = Y_n(H) = 0$.

Сондықтан әрбір n үшін тік сызықты 2-ші дәрежелі ОДУ:

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n = F_n(y), \quad Y_n(0) = Y_n(H) = 0.$$

5. Жалпы шешім

- Біріншісі: Гомогенді теңдеудің шешімі:

$$Y_n^h(y) = A_n \sinh \frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh \frac{n\pi(H-y)}{L}.$$

- Толық шешім:

$$Y_n(y) = Y_n^h(y) + Y_n^p(y),$$

мұндағы $Y_n^p(y)$ — particular solution, яғни

$$Y_n^p(y) \text{ ОДУ } Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n = F_n(y)$$

шешімі. Бұл particular solution әдістерін (мысалы, вариация коэффициенттері немесе интеграл формуласын) қолдану арқылы табылады.

- Соңында, толық шешім:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

6. Қорытынды схема

- Фурье сериясы арқылы x - бойынша бөліну: $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$
- Фурье коэффициенттерін есептеу: $F_n(y) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, y) \sin(n\pi x/L) dx$
- Әрбір n үшін ОДУ шешу: $Y_n'' - (n\pi/L)^2 Y_n = F_n(y), Y_n(0) = Y_n(H) = 0$
- Толық шешім: $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin(n\pi x/L)$